A2 ضمیمہ A2: ریاضیاتی موڈلنگ (MATHEMATICAL MODELLING)

A2.1 تعارف (INTRODUCTION)

1. ایک جوان انسانی جسم میں تقریباً 1,50,00 کلومیٹر شریان اور نبض ہوتی ہیں جو خون لے کر چلتی ہے۔
2. انسانی دل 60 سیکنڈ میں جسم میں 5 سے 6 لیٹر خون پمپ کرتا ہے۔
3. سورج کی سطح پر درجۂ حرارت تقریباً 6,000° C ہوتا ہے۔

کیا آپ نے کبھی یہ سوچا ہے کہ ہمارے سائنس دانوں اور ریاضی دانوں نے کس طرح ان نتائج کا اندازہ الگایا ہوگا؟ کیا انہوں نے کسی جوان جسم میں سے شریان اور نبضوں کو کھینچ کر اس کی پیائش کی ہوگی؟ کیا انہوں نے خون نکال کر یہ نتائج اخذ کئے۔ کیا انہوں نے تھرمامیٹر کے ساتھ سورج کا سفر کیا تھا اور اس کا درجۂ حرارت ناپا تھا۔ یقیناً نہیں، تو کس طرح سے ان کو یہ اعداد وشمار حاصل ہوئے؟

اس کا جواب ریاضیاتی موڈلنگ میں مضمر ہے، جس کا تعارف ہم نے کلاس IX میں دیا تھا۔ یاد کیجئے کہ ریاضیاتی موڈل کسی روزمرہ کی زندگی کی صورت حال کا ریاضیاتی بیان ہے مزید یاد کیجئے کہ ریاضیاتی موڈلنگ، کسی مسئلہ کے ریاضیاتی موڈل کی تخلیق اور اس کا استعمال مسئلہ کو حل کرنے اور اس کا تجزیہ کرنے کا علم ہے۔

اس لئے ریاضیاتی موڈلنگ میں ہم اصل زندگی کے مسئلہ کو لیتے اور اسکو معادل ریاضیاتی مسئلہ میں تبدیل کرتے ہیں اس ریاضیاتی مسئلے کو حل کرتے ہیں اور اس کو حل کی ترجمان اصل زندگی کی صورت حال میں کرتے ہیں۔ اور پھر یہ جانچ کرنا بہت اہم ہوتا ہے کہ جو حال حاصل ہوا ہے اس کا کوئی مطلب یا مفہوم بھی ہے یا نہیں دو مرحلہ موڈل کی validities سے کچھ مثالیں جہاں ریاضیاتی موڈلنگ کی بہت اہمیت ہیں۔

(i) کسی دریا کی چوڑائی اور گہرائی وہاں سے معلوم کرنا جہاں پہنچا نہ جا سکے۔

(ii) زمین اور دوسری سیاروں کی کمیت کا اندازہ لگانا۔

(iii) زمین اور دوسرے سیاروں کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔

(iv) کسی ملک میں مانسون کی آمد کی پیشن گوئی کرنا۔

(v) اسٹاک مارکیٹ کے رجحان کی پیشن گوئی کرنا۔

(vi) کسی شخص کے جسم میں موجود خون کے حجم کا اندازہ لگانا۔

(vii) کسی شہر کی 10 سال بعد کی آبادی کی پیشن گوئی کرنا۔

(viii) ایک درخت میں پتیوں کی تعداد کا اندازہ لگانا۔

(ix) شہر کے ماحول میں مختلف آلودگیوں کے PPm کا اندازہ لگانا۔

(x) ماحول میں آلودگیوں کے اثر کا اندازہ لگانا۔

(ix) سورج کی سطح پر درجہ حرارت کا اندازہ لگانا۔

اس باب میں ریاضیاتی موڈلنگ کے عمل پر نظر ثانی کریں گے اور اپنے اطراف کی دنیا کی مثالیں لے کر اس کی وضاحت کریں گے۔ سیکشن A2.2 میں ہم آپ کو موڈل بنانے کے تمام مراحل سے روشناس کرائیں گے۔ سیکشن A2.3 میں ہم مختلف قسم کی مثالوں کو حل کریں گے۔ سیکشن A 2.4 میں ریاضیاتی موڈلنگ کی اہمیت کی وجہ پر غور کریں گے۔

یاد رکھنے کا ایک نقطہ یہ بھی کہ اس باب میں ہمارا مقصد آپ کو ایک اہم طریقہ سے روشناس کرانا ہے جس میں ریاضی روزمرّہ کے مسائل کو حل کرنے میں مددگار ثابت ہوتی ہے۔ لیکن اس کے لئے یہ ضروری ہے کہ آپ ریاضی کا علم کچھ اور سیکھیں تا کہ آپ ریاضیاتی موڈلنگ کی طاقت کو سراہ سکیں آئندہ کلاسوں میں آپ کو اس ذوق کی کچھ مثالیں ملیں گی۔

A2.2 ریاضیاتی موڈلنگ کے مراحل:

نویں کلاس میں ہم نے موڈلنگ کے استعمال کی کچھ مثالوں پر غور کیا تھا کیا انہوں نے آپ کو اسے عمل میں ملوث اقدام کے سلسلہ میں کوئی بصیرت عطا کی تھی؟ آیئے تیزی سے ہم ریاضیاتی موڈلنگ کے خاص اقدام پر نظر ثانی کرتے ہیں۔

قدم 1: (مسئلہ کو سمجھنا)، اصل مسئلہ کی تعریف بیان کیجئے اور اگر آپ ایک ٹیم کی شکل میں کام کر دیتے ہیں تو اس مسئلہ پر بحث کیجئے جو آپ سمجھنا چاہتے ہیں۔ مفروضات بنا کر اس کو مختصر بناتے اور کچھ چیزوں کو نظر انداز کیجئے تا کہ مسئلہ قابل حل ہو جائے۔ مثال کے طور پر، ہمارا مسئلہ ہے کہ کسی جھیل میں موجود مچھلیوں کی تعداد کا اندازہ لگانا ہے۔ یہ ممکن ہی نہیں ہے کہ ہم ہر مچھلی کو پکڑ کر

گنیں۔ ہم نمونے کے طور پر کچھ مچھلیوں کو پکڑیں اور جھیل میں موجود مچھلیوں کی تعداد کا اندازہ لگائیں۔

قدم 2: ریاضیاتی بیان اور تشکیل: مسئلہ کے مختلف پہلوؤں کو ریاضیاتی زبان میں بیان کریں اور ریاضیاتی زبان میں بیان کرنے کے سلسلہ میں کچھ طریقوں میں ملوث اہم نقاط ہیں۔

- متغیروں کی تعریف بیان کرنا
- مساواتیں اور نا مساواتیں لکھنا
- اعداد و شمار اکٹھا کرنا اور ان کو جدول میں منظّم کرنا
- گراف بنانا
- احتمال معلوم کرنا

مثال کے طور پر، ایک نمونہ لینے کے بعد، جیسا کہ قدم 1 میں بیان کیا گیا ہے، ہم کس طرح پوری آبادی کا اندازہ لگائیں گے؟ ہمیں نمونے کے طور پر لی گئیں مچھلیوں کو نشان زد کرنا ہوگا۔ اور اس جھیل میں باقی مچھلیوں کے ساتھ خلط ملط کرنے کے لئے آزاد کرنا ہوگا۔ اس کے بعد دوبارہ جھیل سے ایک اور نمونے لیجئے اور یہ دیکھئے کہ نئے نمونے، پچھلے نمونے میں نشان زد کی گئیں مچھلیاں شامل ہیں یا نہیں اور نسبت اور تناسب کو استعمال کر کے ہم کل آبادی کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔ مثال کے طور یہ جھیل سے 20 مچھلیوں کا ایک نمونے لیجئے اور ان کو مارک کر دیجیے اور پھر ان کو پانی میں دوبارہ چھوڑ دیجئے۔ تا کہ وہ باقی مچھلیوں کے ساتھ خلط ملط ہو جائے۔ پھر ہم ایک دوسرا نمونے مان لیجیے (50 مچھلیوں) کا ملی جلی آبادی میں سے لیجئے اور دیکھئے اس میں کتنی مچھلیاں مارک والی ہیں۔ اس طرح سے ہم مارک کی گئی مچھلیوں کو یکساں طور پر مچھلیوں کے ساتھ پیش کرتے ہیں اور جو نمونے ہم لیتے ہیں وہ پوری آبادی کی صحیح نمائندگی کرتا ہے۔

قدم 3: (ریاضیاتی مسئلے کو حل کرنا): قدم 2 سے ملی ریاضیاتی مسئلہ کی مختصر شکل کو مختلف ریاضیاتی تکنیکوں کے استعمال سے حل کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر مان لیجئے مثال کے دوسرے نمونے میں 5 مچھلیوں کو نشان زد کیا گیا۔ اس طرح 5/50 یعنی آبادی کا $\frac{1}{10}$ مارک کیا گیا، اگر یہ پوری آبادی کا typical تب آبادی کا $\frac{1}{10}$ ہے $= 20$

اس لئے کل آبادی $= 10 \times 20 = 200$ ہے۔

قدم 4: (حل کی ترجمانی): پچھلے قدم میں ملے حل کو اب اصل زندگی کی صورت حال کے پس منظر میں دیکھیے جو ہم نے قدم 1:

میں شروع کی تھی۔

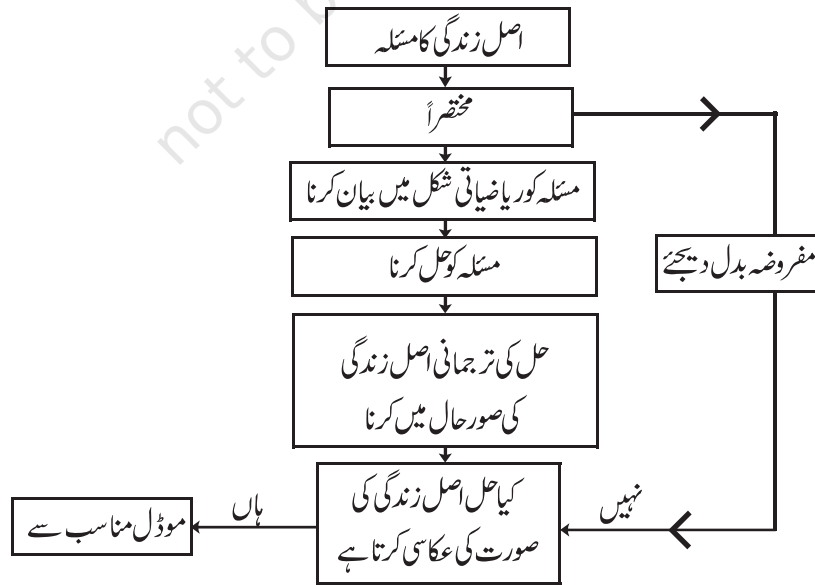
مثال کے طور پر قدم 3 میں مسئلے کا حل مچھلیوں کی کل آبادی 200 دیتا ہے۔

قدم 5: (Validating the model) کو سبق کنندہ موڈل

ہم اپنے اصل مسئلے کی طرف واپس جاتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ جو نتیجہ آیا اس کا کچھ احساس بھی ہے یا اگر ایسا ہے تو ہم اس موڈل کو جب تک استعمال کرتے ہیں جب تک کہ نئی اطلاعات فراہم نہ ہو جائیں یا مفروضات بدل جائیں۔

کبھی کبھی مفروضات کے اختصار کی وجہ سے ہم اصل مسئلہ کا ضروری پہلو نظر انداز کر دیتے ہیں جب ہم اس کا ریاضیاتی بیان دیتے ہیں ایسی حالت میں حل حقیقت سے بہت دور ہوتا ہے اور اصل میں اس کا کوئی مطلب نہیں ہوتا۔ اگر ایسا ہو تو ہم قدم 1 میں لئے گئے مفروضہ پر دوبارہ غور کرتے ہیں۔ اور حقیقت سے نزدیک بنانے کے لئے اس کو تبدیل کرتے ہیں خاص طور سے کچھ ایسی چیزوں (factor) کو ان میں شامل کر کے جو پہلے شامل نہیں تھے۔

مثال کے طور پر قدم 3 میں ہمیں مچھلیوں کی پوری آبادی کا اندازہ حاصل ہوا ہے ضروری نہیں کہ یہ جھیل میں موجود مچھلیوں کی اصل تعداد ہو۔ ہم قدم 2 اور 3 کوئی مرتبہ دہرا کر دیکھتے ہیں کہ یہ مچھلیوں کا صحیح اندازہ ہے یا نہیں اور پھر نتائج کا درمیانہ لیتے ہیں۔ یہ آبادی کا نزدیکی اندازہ ہوگا۔

ریاضیاتی موڈلنگ کے عمل کو دیکھنے کا ایک اور طریقہ شکل A2.1 میں دکھایا گیا ہے۔

موڈل بنانے والے اختصار (حل کی اضافی کے لئے) اور درستگی کے درمیان توازن پر نظر رکھتے ہیں کیونکہ بہتر نتیجہ سے آپ پیشن گوئی کر سکتے ہیں کہ کیا ہوگا۔

یاد کیجئے کہ مسئلہ کو مختصر بنانے کے لئے ہم مختلف مفروضہ استعمال کرتے ہیں۔ جن سے ہمیں مختلف موڈل ملتے ہیں اس لئے کوئی بھی موڈل مکمل نہیں ہوتا۔ اچھے موڈل بھی ہوتے ہیں لیکن ان سے بہتر بھی بنائے جا سکتے ہیں۔

مشق A2.1

1. مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کیجیے

یہ مسئلہ 13 ویں صدی کے اوائل کا ہے جو Leonard Fibonacci نے اٹھایا تھا۔ اس نے پوچھا تھا کہ آپ کے پاس کل کتنے خرگوش ہوں گے اگر شروع میں آپ کے پاس صرف دو خرگوش ہوں اور تولید کے لئے ان کو چھوڑ دیں۔ فرض کیجئے خرگوشوں کا ایک جوڑا ہر مہینہ خرگوشوں کا ایک جوڑا پیدا کرتا ہے اور پیدا ہوئے خرگوش 2 مہینہ کی عمر میں اپنا پہلا بچہ پیدا کرتے ہیں۔ مہینہ در مہینہ خرگوشوں کے جوڑوں کی تعداد صفر اور پہلے مہینے کو چھوڑ کر پچھلے دو مہینے میں خرگوشوں کا حاصل جمع ہوتا ہے:

مہینہ	خرگوشوں کے جوڑے
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

16 مہینوں کے بعد ایک کے پاس تقریباً 1600 خرگوش ہوں گے۔
اس صورت حال کے ریاضیاتی موڈلنگ سے مختلف مراحل کو واضح طور پر بیان کیجیے۔

A2.3 کچھ وضاحتیں

آیئے اب ریاضیاتی موڈلنگ کی کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1: (پانسوں کے ایک جوڑے کو پھینکنا): فرض کیجیے آپ کی ٹیچر آپ کو اندازے سے ایک کھیل کھلاتی ہیں۔ وہ پانسوں کا ایک جوڑا پھینکتی ہے۔ اس سے پہلے آپ کو ان پانسوں کے اوپر کے رخ پر آنے والے اعداد کے حاصل جمع کا اندازہ کرتا ہے ہر صحیح اندازے پر آپ کو دو پوائنٹ دیے جائیں گے۔ اور غلط اندازے پر آپ کو دو پوائنٹ کھونے پڑیں گے۔ کون سے اعداد کا اندازہ سب سے بہتر ہوگا۔

حل:

قدم 1: (مسئلے کو سمجھنا): آپ کو کچھ ایسے اعداد کا علم ہونا چاہیے جن کے آنے کے امکان زیادہ ہوں۔

قدم 2: (ریاضیاتی بیان): ریاضیاتی زبان میں مسئلے کا مطلب ہے پانسوں کے ذریعے دکھائے جانے والے اعداد کے ممکنہ حاصل جمع کا احتمال معلوم کریں۔

ہم صورت حال کو آسانی سے، پانسوں کے پھینکے جانے کو مندرجہ ذیل اعداد، کے 36 جوڑوں میں ایک کے بلا منصوبہ انتخاب کے طور پر، موڈل کر سکتے ہیں۔

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

ہر ایک جوڑے میں پہلا عدد پہلے پانسہ پر آنے والے عدد کو اور دوسرا عدد دوسرے پانسہ پر آنے والے عدد کو ظاہر کرتا ہے۔

قدم 3: (ریاضیاتی مسئلے کو حل کرنا): اوپر دیئے گئے ہر ایک جوڑے کا حاصل جمع معلوم کرنے پر ہم ممکنہ حاصل جمع پاتے ہیں 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 اور 12 حاصل ہوتے ہیں ہمیں 36 جوڑوں کو مساوی امکانی مان کر ہر ایک کا احتمال معلوم کرنا ہے۔

ایسا ہم مندرجہ ذیل جدول میں کرتے ہیں۔

حاصل جمع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
احتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

مشاہدہ کیجئے کہ حاصل جمع 7 کے آنے کا امکان $\frac{1}{6}$ ہے، جو باقی کسی اور عدد کے حاصل جمع کے طور پر آنے کا امکان بڑا ہے۔

قدم 4: (حل کی ترجمانی): کیونکہ حاصل جمع 7 آنے کا احتمال سب سے زیادہ ہے اس لئے آپ بار بار عدد 7 کا اندازہ کیجیے۔

قدم 5: (توسیق کنندہ موڈل): پانسوں کے ایک جوڑے کو کثیر تعداد میں پھینکیے۔ اور اس کا متعلقہ تعدد جدول بنائیے۔ متعلقہ تعدد کا ان کے نظیری احتمالوں سے موازنہ کیجئے۔ اگر یہ قریب قریب نہیں ہے تب ممکنہ طور پر پانسے جانب دار ہیں۔

تب ہم اس عدد کی جس کی طرف پانسے جانب دار ہیں، قدر معلوم کرنے کے لئے اعداد و شمار حاصل کرتے ہیں اگلی مثال کو حل کرنے سے پہلے آپ کو کچھ پس منظر معلوم ہونا ضروری ہے۔

بہت سے لوگوں کا یہ مشترک تجربہ ہے کہ جب آپ کو کچھ پیسوں کی ضرورت ہوتی ہے جبکہ ان کے پاس ضروری کام کے لئے مناسب پیسے نہیں ہوتے۔ وہ روزمرّہ کے استعمال کی ضروری اشیا کو خریدنا ہو یا ایسے آرام کے لئے چیزوں کو خریدنے کے لئے پیسوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ گاہکوں کو اس قابل بنانے کے لئے تو وہ محدود فنڈ میں اشیا جیسے اسکوٹر، فرج، T.V.، کاریں وغیرہ خرید سکیں۔ تاجر اکثر قسطوں میں ادائیگی سے متعارف کراتے ہیں۔

کبھی کبھی تاجر قسطوں کی اسکیم اس لئے نکالتے ہیں کہ یہ ان کی گاہکوں کو کچھ اشیا خریدنے پر رجھانے کی حکمت عمل ہوتی ہے۔ قسطوں کی اسکیم میں گاہک کو اشیا خریدتے وقت پوری رقم ادا کرنا ضروری نہیں ہوتا۔ وہ کچھ حصہ کو اشیا کو خریدتے وقت ادا کرتے ہیں اور باقی رقم قسطوں میں ادا کرتے ہیں جو ماہانہ، سہ ماہی، ششماہی یا سالانہ ہوتی ہیں۔ بے شک خریدنے والے کو قسطوں کی اسکیم میں کچھ رقم زیادہ دینی پڑتی ہے کیونکہ تاجر ان سے پوری رقم بعد کی تاریخ میں لینے کے لئے کچھ سود لیتا ہے۔

اس سے پہلے کہ ہم قسطوں کی اسکیم کو سمجھنے کے لئے کچھ مثالوں پر غور کریں آیئے اس تصور سے متعلق استعمال ہونے والی کچھ اصطلاحات کو سمجھ لیں۔

نقد قیمت: کسی شے کی نقد قیمت ہے جو ایک گاہک کو چیز کی پوری قیمت کے طور پر ادا کرنا ضروری ہوتی ہے۔ (.C. D. P) Cash Down Payment وہ رقم ہے جو گاہک کو کل قیمت کے ایک جز کے طور پر چیز خریدتے وقت پر ادا کرنی ہوتی ہے۔

ریمارک: اگر قسطوں کی اسکیم ایسی ہے کہ بقیہ ادائیگی چیز خریدنے کے بعد ایک سال کے اندر کی جائے تو تاخیر ادائیگی پر سود مفرد لیا جاتا ہے۔

ماضی میں ادھار میں لی گئی چیزوں پر سود لینا اکثر برا سمجھا جاتا ہے اور خاص طور لمبے عرصہ تک منع تھا۔ سود کے خلاف قانون سے بچنے کے لئے لوگوں نے ایک طریقہ نکالا تھا چیز کو ایک کرنسی ادھار لیتے تھے اور دوسری کرنسی میں واپس کرتے، اس طرح سے سود کی شکل بدل دی جاتی تھی۔

آیئے اب اس سے متعلق ریاضیاتی موڈلنگ مسئلے کی طرف واپس آتے ہیں۔

مثال 2: جوہی ایک سائیکل خریدنا چاہتی ہے وہ مارکیٹ جاتی ہے اور یہ پاتی ہے کہ جو سائیکل وہ خریدنا چاہتی ہے اس کی قیمت 1800 روپے ہے۔ جوہی کے پاس 600 روپے ہیں۔ وہ دکاندار کو یہ بتاتی ہے کہ وہ اس کو نہیں خرید سکتی۔ دکاندار کو کچھ تحسیب کرنے کے بعد اسے ایک پیش کش کرتا ہے وہ جوہی سے کہتا ہے کہ وہ 600 روپے .C.D.P کے طور پر دے کر سائیکل لے سکتی ہے اور باقی رقم 610 روپیہ کی دو ماہانہ قسطوں میں ادا کر سکتی ہے جوہی کے پاس Option میں ایک تو یہ کہ دو قسطوں کی ایک اسکیم پر سائیکل خریدے اور دوسری یہ کہ وہ ایک بینک سے 10% سالانہ کی شرح سے سود مفرد لے کر سائیکل کو نقد خریدے۔ بتایئے کس طریقے سے اس کو معاشی طور پر فائدہ ہوگا۔

حل: (**مسئلہ کو سمجھنا**) جوہی کو یہ فیصلہ کرنا ہے کہ وہ دکاندار کی پیش کش کو قبول کرے یا اس کے لئے اس کو سود کی دو شرحوں پر غور کرنا ہے۔ ایک وہ سود جو قسطوں کی ایک اسکیم میں اس کو دینا ہے دوسری وہ جو بینک (یعنی 10%) اسے دینا ہے۔

قدم 2: (ریاضیاتی) اسکیم کو قبول کرنے یا ردّ کرنے کے سلسلہ میں اس کو دکاندار کے ذریعے ادا کئے گئے سود کا موازنہ بینک کے

ذریعے لئے گئے سود سے کرنا ہے۔ مشاہدہ کیجیے کہ پوری رقم ایک سال کے اندر ادا کرنی ہے تو سود مفرد ہی دینا ہوگا۔

ہم جانتے ہیں کہ سائیکل کی نقد قیمت ہے = 1800 روپے

قسطوں کی اسکیم کے تحت CDP = 600 روپے

اس لئے بقیہ رقم جو قسطوں میں ادا کرنی وہ (600 - 1800) = 1200

مان لیجئے دکاندار r% سالانہ کی شرح سے سود لیتا ہے

ہر قسط کی رقم = 610

قسطوں کے ذریعے ادا کی گئی رقم 610 + 610 = 1220

قسطوں کی اسکیم میں دیا جانے والا سود 1200 - 1220 = 20 (1)

کیونکہ جوہی نے 1200 روپے کی رقم ایک مہینہ تک اپنے پاس رکھی اس لئے

مہینہ کی اصل زر = 1200 روپے

دوسرے مہینہ کا اصل زر (610 - 1200) = 590

دوسری قسط = ماہانہ قسط (610) = لیا گیا سود (20) + 190 دوسری اصل زر کی رقم

اس لئے ایک مہینہ کا کل اصل زر 590 + 1200 = 1790 روپے

اب $$\text{سود} = \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} \qquad (2)$$

قدم 3: (مسئلے کو حل کرنے پر) (1) اور (2) سے

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

$$r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \quad (\text{تقریباً})$$

قدم 4: (حل کی ترجمانی): قسطوں کی اسکیم میں لئے جانے والے سود کی شرح سے 13.14% بینک کے ذریعے لئے جانے والے سود کی شرح = 10%

اس لئے وہ بینک سے رقم لینے کو ترجیح دے گی جو کہ اس کے لئے فائدہ مند ہے

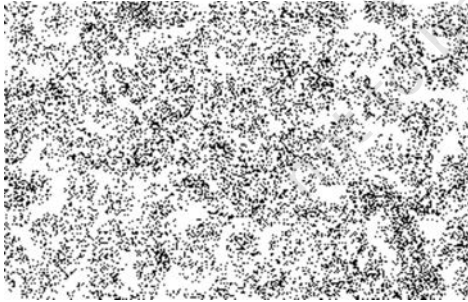
قدم 5: (توسیق کنندہ موڈل) اس مثال میں یہ مرحلہ زیادہ اہمیت کا حامل نہیں ہے کیونکہ یہاں اعداد متعین ہیں۔لیکن اگر بینک سے رقم ادھار لیتے ہیں۔ بہت سی چیزیں جیسے اسٹیمپ پیپر کی کاسٹ وغیرہ جس کی وجہ سے سود کی شرح بڑھ جاتی ہو تو وہ ایسا نظریہ بدل بھی سکتی ہے۔

ریمارک: سود کی شرح کی موڈلنگ ابھی تک ابتدائی مرحلہ میں ہے اور توسیق مالیاتی مارکیٹ کے لئے ابھی بھی مسئلہ ہے۔اگر قسطوں کو فکس کرنے کے لئے مختلف سود کی شرح لاگو ہوں تو سوسیق پھر ایک اہم مسئلہ بن جاتا ہے۔

مشق A2.2

مندرجہ ذیل پر ایک مسئلے کو حل کرنے کے لئے ریاضیاتی موڈلنگ کی مختلف مراحل کو دکھایئے۔

1. ایک ماہر علم الطیور ایک بڑے میدان میں طوطوں کی تعداد کا اندازہ لگانا چاہتا ہے۔ وہ ان میں سے کچھ کو پکڑنے کے لئے ایک جال کا استعمال کرتا ہے اور 32 طوطے پکڑ لیتا ہے جن پر وہ نشان لگا کر چھوڑ دیتا ہے۔اس کے اگلے ہفتہ میں وہ اسی طرح سے جال میں 40 طوطے پکڑتا ہے جس میں 8 طوطوں پر نشان لگا ہوتا ہے

(i) دوسری مرتبہ پکڑے گئے طوطوں پر نشان لگے طوطوں کی کسر کیا ہے؟

(ii) میدان میں موجود کل طوطوں کی تعداد کا اندازہ لگایئے۔

2. متصل شکل ایک جنگل کی اونچائی سے لیا گیا ایک فوٹوگراف ہے جس میں ہر ڈاٹ ایک درخت کو ظاہر کرتا ہے۔ ماحولیاتی سرشاری کی وجہ سے آپ کا مقصد اس جنگل میں درختوں کی تعداد معلوم کرنا ہے۔

3. ایک T. V. کو 24000 روپے نقد یا 800 روپے C.D.P. کے طور پر خریدا جا سکتا ہے۔ باقی کی رقم 2800 روپے ماہانہ کی چھ قسطوں میں ادا کی جاتی ہے۔علی مارکیٹ T. V خریدنے جاتا ہے اور اس کے پاس 800 روپے بھی ہیں۔اب اس کے پاس کوئی بھی طریقہ اختیار کرنے کا حق ہے۔ایک تو یہ کہ وہ قسطوں کی اسکیم کے تحت T. V خریدے یا کسی مالیات سوسائٹی سے قرض لے کر نقد T.V. خریدے۔سوسائٹی 18% سالانہ کی شرح سے سود مفرد لیتی ہے۔علی کے لئے کون سا طریقہ اختیار کرنا بہتر ہے۔

A2.4 ریاضیاتی موڈلنگ اتنی اہم کیوں ہے؟

جیسا کہ ہم مثالوں میں دے چکے ہیں۔ ریاضیاتی موڈلنگ Interdisciplinary مضمون ہے ریاضی داں اور دوسرے میدانوں کے ماہرین اپنے علم اور مہارت کو موجودہ پروڈکٹ کو بہتر بتانے اور دوسرے نئے بہترین پروڈکٹ بنانے یا کچھ مخصوص پروڈکٹ کی کوالٹی کی پیشن گوئی کرنے میں، تعاون کرتے ہیں۔

بے شک ریاضیاتی موڈلنگ کی اہمیت کچھ مخصوص وجوہات ہیں لیکن ان میں زیادہ تر مندرجہ ذیل سے متعلق ہیں۔

- سمجھ حاصل کرنا: اگر ہمارے پاس ایک ایسا موڈل ہے جو اصل دنیاوی دلچسپی کے نظام کے ضروری طور طریقوں کی عکاسی کرتا ہے۔ ہم اس نظام کو موڈل کے تجزیہ کے ذریعہ بہتر طور پر سمجھ سکتے ہیں۔ مزید موڈل کی تشکیل کے عمل میں ہم ان چیزوں (factors) کو معلوم کرتے ہیں جن کی نظام میں بہت اہمیت ہوتی، اور نظام کے مختلف پہلو کس طرح سے ایک دوسرے سے متعلق ہیں۔
- پیشن گوئی کرنا یا بہروپ بھرنا (Simulate): اکثر ہماری یہ جاننے کی خواہش ہوتی ہے کہ اصل دنیاوی نظام مستقبل میں کیا کرے گا۔ لیکن نظام کے ساتھ براہ راست تجزیہ کرنا کافی مہنگا اور ناممکن ہے مثال کے طور پر موسم کی پیشین گوئی، میں انسانوں میں ادویات کے اثر کا مطالعہ کرنے میں اور ایک نیوکلیری ایکٹر کا مناسب ڈیزائن معلوم کرنا وغیرہ۔ مختلف قسم کی تنظیموں میں پیشین گوئی کی کافی اہمیت ہے کیونکہ مستقبل میں ہونے والے واقعات کی پیشین گوئی فیصلہ لینے کے عمل میں کافی کارآمد ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر مارکیٹ کے شعبوں میں مانگ کی صحیح پیشین گوئی سیل کی صحیح حکمت عملیاں بنانے میں مددگار ثابت ہوتی ہے۔

اسکول بورڈ کو کسی ڈسٹرکٹ میں اسکول جانے والے بچّوں کی تعداد میں اضافہ کی پیشن گوئی کرنے کی ضرورت ہوتی ہے تاکہ یہ طے کیا جاسکے کہ کب اور کہاں نئے اسکول کھولے جاتے ہیں۔

زیادہ تر پیشین گوئی کرنے والے مستقل کے بارے میں پیشن گوئی کرنے کے لئے پرانے اعداد وشمار کا استعمال کرتے ہیں پہلے وہ اعداد وشمار کا تجزیہ کرتے ہیں تاکہ ان کو بیان کرنے والے پیٹرن (نمونہ) کی شناخت کی جاسکے۔ اور پھر ان اعداد وشمار اور پیٹرن کی توسیع مستقبل میں پیشین گوئی کرنے کے لئے کرتے ہیں۔ زیادہ تر پیشین گوئی کی تکنیک میں یہی بنیادی حکمت عملی استعمال ہوتی ہے۔ اور اس کی بنیاد اس مفروضہ پر ہوتی ہے کہ پیٹرن جس کی شناخت کی جاچکی ہے، مستقبل کے لئے بھی کارکرگر ہوگا۔

- انـدازہ لـگـانـا : اکثر ہمیں بڑی قدروں کا اندازہ لگانا ہوتا ہے۔ آپ جنگل میں درختوں، جھیل میں مچھلیوں کی تعداد کی مثالیں دیکھ چکے ہیں۔ چناؤ سے پہلے زیادہ تر سیاسی پارٹیاں اپنے الیکشن جیتنے کے احتمال کی پیشن گوئی کرنا چاہتی ہیں۔ خاص طور پر وہ یہ جاننا چاہتی ہیں ان کے حلقہ کے کتنے لوگ ان کی پارٹی کو ووٹ دیں گے۔ اس پیشن گوئی کی بنیاد پر اپنے انتخابی مہم کی حکمت عملی تیار کرتی ہیں۔ آج کل رائے شماری کے بعد اندازہ کرنے کا کثرت سے استعمال یہ پیشن گوئی کرنے کے لئے ہوتا ہے کہ کون سی پارٹی سیٹ جیتے گی۔

مشق A2.3

1. پچھلے 5 سالوں کی اعداد و شمار کی بنیاد پر پیشن گوئی کی کوشش کیجیے کہ سال کے آخر میں آپ کے اسکول میں دسویں کلاس کے بورڈ کے امتحان میں ریاضی میں آنے والے نمبروں کی اوسط فی صد کیا ہوگی۔

A2.5 خلاصہ

اس ضمیمہ میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1. ریاضیاتی موڈل اصل زندگی کی صورت حال کا ریاضیاتی بیان (شکل) ہے۔ ریاضیاتی موڈلنگ کا کام ریاضیاتی موڈل بنانے کا عمل ہے۔ اس کو حل کرنا اور اس کا استعمال کر کے اصل زندگی کا مسئلہ کو سمجھنا۔
2. موڈلنگ میں ملوث بہت سے اقدام ہیں: مسئلہ کو سمجھنا، ریاضیاتی موڈل کی تشکیل، اس کو حل کرنا اصل زندگی کی صورت حال میں اس کی ترجمانی کرنا اور خصوصاً توسیق کنندہ موڈل۔
3. کچھ ریاضیاتی موڈل کی تخلیق۔
4. ریاضیاتی موڈلنگ کی اہمیت۔